אלגברה 1/מ

תרגול

מתרגלת: ויויאן לאון

אביב תשפ"ד

TECHNION
Israel Institute of Technology

תזכורת:

1. שורש של פולינום $p(x)$ הוא פתרון למשוואה $p(x) = 0$.
2. המשפט היסודי של האלגברה:
   לכל פולינום ממעלה n יש **בדיוק** n שורשים בתוך **המרוכבים**.
   נוסח אחר: $p(x)$ פולינום ממעלה n, אז קיימים $x_1, x_2, \dots, x_n$ כך ש:
   $$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$
3. משפט: עבור $p(x)$ פולינום ממעלה n, עם מקדמים שלמים, אם ל-$p(x)$ יש שורש רציונלי $x = \frac{r}{t}$ (כאשר $\frac{r}{t}$ שבר מצומצם) אז:
   1. $r | a_0$
   2. $t | a_n$
4. a שורש של פולינום $p(x)$ מריבוי k אם $(x - a)^k$ מחלק את $p(x)$ ו- $(x - a)^{k+1}$ לא מחלק את $p(x)$.
5. מספר a הוא שורש של פולינום $p(x)$ מריבוי k אמ"מ $p^{(m)}(a) = 0$ לכל $m < k$ אבל $p^{(k)}(a) \neq 0$

TECHNION Israel Institute of Technology

תזכורת:

6. נוסחאות וייטה:

$$\boxed{\frac{(-1)^n a_0}{a_n} = x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\boxed{-\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

פרק 2
מספרים מרוכבים

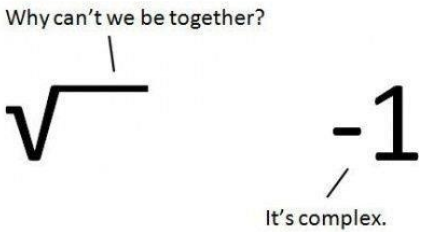
TECHNION
Israel Institute of Technology

מספר מרוכב:

הוא מספר מהצורה $z = a + ib$, כאשר a,b הם מספרים ממשיים ו- i מקיים $i^2 = -1$.

החלק **הממשי** = $Re(z) = a$

החלק **המדומה** = $Im(z) = b$



אם $Im(z) = 0$ אז z נקרא ממשי טהור. לדוגמא: $z = 7$

אם $Re(z) = 0$ אז z נקרא מדומה טהור. לדוגמא: $z = 5i$

הצמוד של מספר מרוכב $z = a + ib$ הוא המספר $\bar{z} = a - ib$

עבור $z = a$ ממשי טהור, $\bar{z} = a = z$
עבור $z = ib$ מדומה טהור, $\bar{z} = -ib = -z$

הערך המוחלט (מודול) של מספר מרוכב $z = a + ib$ הוא: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

שוויון שבין שני מספרים מרוכבים: שני מספרים מרוכבים שווים זה לזה **אמ"מ** החלק הממשי של שניהם שווה **וגם** החלק המדומה של שניהם שווה

תכונות של מספרים מרוכבים:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
5. $\bar{\bar{z}} = z$
6. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
7. $|z^n| = |z|^n$
8. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
9. $|\bar{z}| = |z|$
10. אי-שוויון המשולש: $|z+w| \leq |z| + |w|$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תכונות של מספרים מרוכבים:

11. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

12. $z + \bar{z} = 2Re(z)$

13. $z - \bar{z} = 2iIm(z)$

חזקות של i:

$i^0 = 1$	$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$

$$\boxed{i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

לסיכום:

$$i^n = \begin{cases} 1 & n\%4 = 0 \\ i & n\%4 = 1 \\ -1 & n\%4 = 2 \\ -i & n\%4 = 3 \end{cases}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

משפט:

יהי $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ פולינום ממעלה n כך ש- $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ממשיים, אם z מרוכב הוא שורש של $p(x)$, אזי $\bar{z}$ גם שורש של $p(x)$.

למה זה נכון?

נתון z הוא שורש של $p(x)$. נחשב את $p(\bar{z})$:

$$p(\bar{z}) = a_n \cdot \bar{z}^n + \ \ldots + a_1 \cdot \bar{z} + a_0 =$$
$$= a_n \cdot \overline{z^n} + \ \ldots + a_1 \cdot \bar{z} + a_0 =$$
$$= \overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \ \ldots + \overline{a_1} \cdot \bar{z} + \overline{a_0} =$$
$$= \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} =$$
$$\overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} =$$
$$= \overline{p(z)} = \bar{0} = 0$$

$\Leftarrow$ $\bar{z}$ הוא שורש של $p(x)$

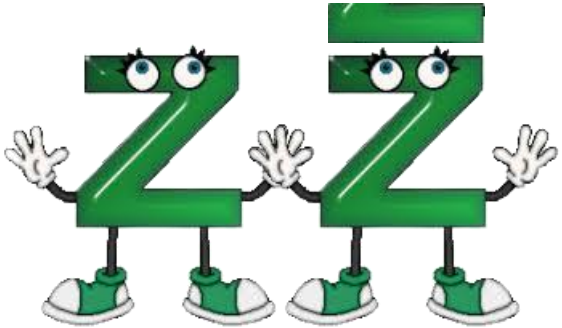
TECHNION
Israel Institute of Technology

טענה:

יהי $p(x)$ פולינום שכל מקדמיו ממשיים, ונניח שיש לו שורש מרוכב z_0 מריבוי k. אז גם הצמוד $\overline{z_0}$ הוא שורש של $p(x)$ מריבוי k.

מסקנה:

אם $p(x)$ פולינום ממעלה n עם מקדמים ממשיים ו- n אי-זוגי, יש ל- $p(x)$ שורש ממשי.



תרגיל 1:

מצאו את כל הפתרונות של המשוואה: $z^2 = \bar{z}$

תרגיל 2:

לחשב: $|(2+i)^4(1-i)^{60}|$

תרגיל 3:

יהי $w = \frac{1+z}{1-z}$, נתון $z \neq 1$ מספר מרוכב, הוכח ש- $Re(w) \geq 0$ אמ"מ $|z| \leq 1$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 4:

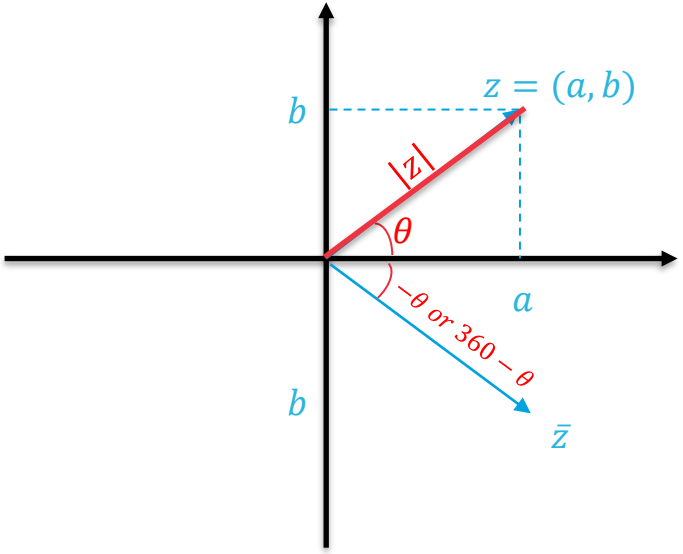
נתון w,z לא ממשיים, אבל $w+z$ ו- $w \cdot z$ ממשיים.
צ"ל: $z = \overline{w}$.

TECHNION
Israel Institute of Technology

מספרים מרוכבים – ייצוג גאומטרי

ייצוג אלגברי: $z = a + ib = (a,b)$

תיאור במישור:



TECHNION
Israel Institute of Technology

נתאר את z בעזרת $|z|,\theta$:

$$a = |z|cos\theta = rcos\theta$$

$$b = |z|sin\theta = rsin\theta$$

$$z = a + ib = |z|cos\theta + i|z|sin\theta = |z|(cos\theta + isin\theta) = |z|cis\theta = rcis\theta$$

מודול

זווית/
ארגומנט

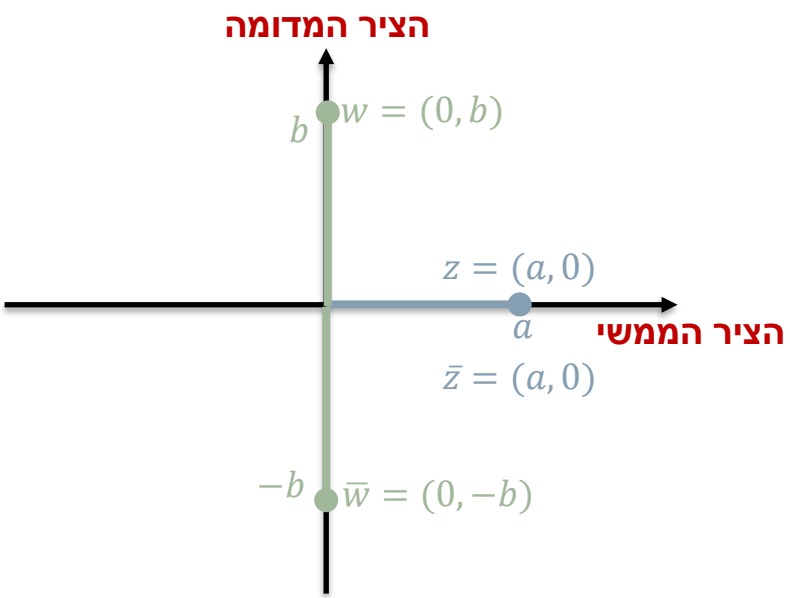
$$\bar{z} = a - ib = |z|\cos(-\theta) + i|z|\sin(-\theta) = |z|\big(\cos(-\theta) + isin(-\theta)\big) = |z|cis(-\theta) = rcis(-\theta)$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

מספר ממשי ומספר מדומה טהור במישור

עבור $z = a + ib$ מספר ממשי, מתקיים $b = 0$ ולכן z נמצא על ציר x.

עבור $z = a + ib$ מספר מדומה טהור, מתקיים a ולכן z נמצא על ציר y.



מה לומדים מייצוג זה?

1. המספרים הממשיים מוכלים במספרים המרוכבים ונמצאים על הציר הממשי.
2. המספר 0 הוא גם ממשי (על ציר a) וגם מדומה טהור, והוא היחידי בעל תכונה זו.
3. במספרים המרוכבים אין סדר כי הם מפוזרים על כל המישור, ולכן הסימנים $>$, $<$ לא רלוונטיים בקבוצה זו.

נוסחאות דמואבר:

$$z_1 = r_1 cis\theta_1$$
$$z_2 = r_2 cis\theta_2$$
$$z = r cis\theta$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 cis\theta_1) \cdot (r_2 cis\theta_2) = r_1 r_2 \cdot cis(\theta_1 + \theta_2)$$

$$z^n = r^n cis(n\theta)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2)$$

θ- ארגומנט של z ומסמנים: $\arg(z)$.

TECHNION
Israel Institute of Technology

מציאת שורשים של מספר מרוכב z

יהי $z = rcis\theta$. נוסחת השורשים:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}cis\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

סכום ומכפלה של שורשים מסדר n של מספר מרוכב z

יהי z מספר מרוכב. השורשים מסדר n של z הם מספרים w כך ש- $w^n = z$. כלומר, אלו השורשים של הפולינום

$$p(w) = w^n - z$$

$a_n = 1, a_0 = -z$
$a_{n-1} = 0$

לפי נוסחאות וייטה מתקיים:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = 0$$

כלומר, סכום כל השורשים מסדר n של מספר מרוכב הוא 0.

והמכפלה:

$$w_1 \cdot w_2 \cdot \cdots \cdot w_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \cdot \frac{-z}{1} = (-1)^{n+1} z$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תכונות השורשים מסדר n של מספר מרוכב z

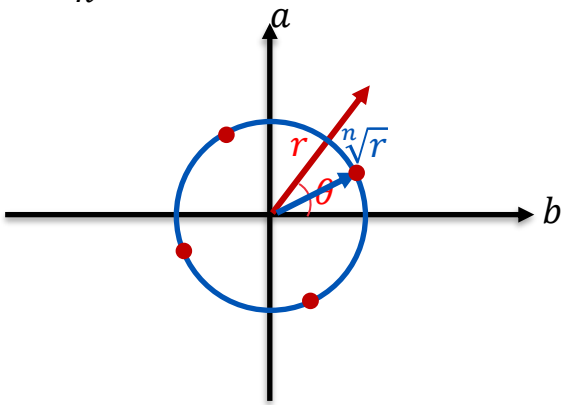
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, cis\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right), k = 0,1,\dots,n-1$$

1. כל השורשים הם בעלי אותו מודול, השווה ל- $\sqrt[n]{r}$

כלומר כל השורשים נמצאים על אותו המעגל סביב הראשית.

2. כל השורשים מפוזרים על המעגל במרחק שווה, השווה $\frac{360°}{n}$, כאשר השורש הראשון מופיע ב $\frac{\theta}{n}$.

3. יש בדיק n שורשים וכולם שונים זה מזה.



TECHNION
Israel Institute of Technology

שורשי היחידה מסדר n

יהי $n \in \mathbb{N}$, מספר טבעי המקיים $n \geq 2$. השורשים מסדר n של 1 נקראים שורשי היחידה מסדר n, כלומר אלו המספרים $x \in \mathbb{C}$ המקיימים $x^n = 1$.

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1}\ cis\left(\frac{0 + 360°k}{n}\right), k = 0,1,\dots,n-1$$

$$\sqrt[n]{1} = cis\left(360° \cdot \frac{k}{n}\right) \qquad , k = 0,1,\dots,n-1$$

דוגמא:

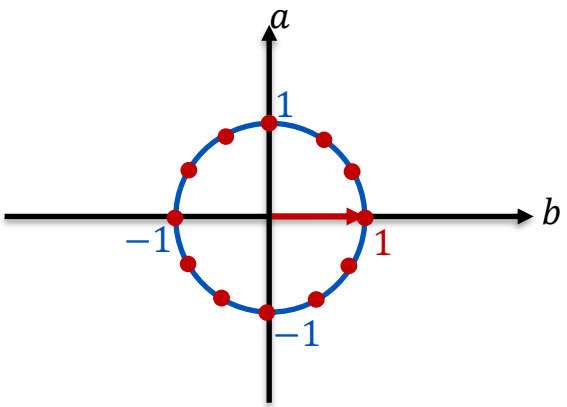
שורשי היחידה מסדר 12 הם: $k = 0,1,\dots,11$, $z_k = cis(30°k)$:

נקח $k = 2$. נקבל $z_2 = cis(30° \cdot 2)$

נעלה בחזקת 3 ונקבל:

$$z_2^3 = cis(30° \cdot 2)^3 = cis(30° \cdot 2 \cdot 3) = cis(30° \cdot 6) = z_6$$

קיבלנו שורש יחידה אחר מסדר 12!



מסקנה:

אם z_k שורש יחידה מסדר n אז לכל m טבעי, גם z_k^m שורש יחידה מסדר n.

TECHNION
Israel Institute of Technology

טענה

כל שורשי היחידה מסדר n, הם שורשי יחידה מסדר m לכל $m \in \mathbb{N}$ שמקיים $n|m$.

הוכחה

יהי z שורש יחידה מסדר n. כלומר מתקיים $z^n = 1$.
יהי $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $n|m$. כלומר קיים $k \in \mathbb{Z}$ שמקיים $n \cdot k = m$.
ולכן:

$$z^m = z^{n \cdot k} = (z^n)^k = 1^k = 1$$

כלומר, z הוא שורש יחידה מסדר m.

דוגמא

יהי z שורש יחידה מסדר 3. כלומר מתקיים $z^3 = 1$.
יהי $m = 12$. מתקיים:

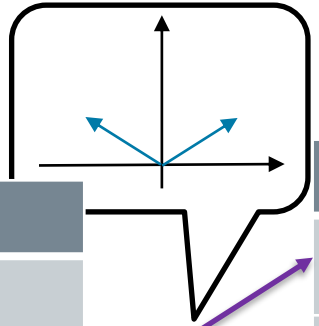
$$z^{12} = z^{3 \cdot 4} = (z^3)^4 = 1^4 = 1$$

כלומר, z הוא שורש יחידה מסדר 12.

TECHNION
Israel Institute of Technology

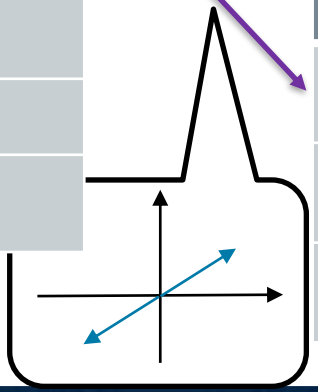
כדאי לזכור..

α	$cos(\alpha)$	$sin(\alpha)$
$0°$	1	0
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$90°$	0	1
180	-1	0



α	$cos(\alpha)$	$sin(\alpha)$
$150°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$135°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$120°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

α	$cos(\alpha)$	$sin(\alpha)$
$210°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$240°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 1:

מצאו ייצוג גאומטרי של:

1. $z = -1 - \sqrt{3}i$
2. $z = 7$
3. $z = -7$
4. $z = 3i$
5. $z = -3i$

מסקנה:

צריך לזהות את הרביע ולמצוא בו זווית כך ש- $tan\theta = \frac{b}{a}$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 2:

חשבו: $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^9$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^9$$

$$-1$$

תרגיל 3:

חשבו את $\sqrt[3]{3+i\sqrt{3}}$

תרגיל 4:

נתון $w_1, \dots, w_{10}$ הם פתרונות של המשוואה $w^{10} + \sqrt{3} = \sqrt{3}i$
חשבו את $\arg(w_1 \cdot \dots \cdot w_{10})$

TECHNION
Israel Institute of Technology